ТЕОРЕМА О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

РЕШЕНИЕ 3-Й ПРОБЛЕМЫ ЛАНДАУ

(ГИПОТЕЗА ЛЕЖАНДРА)

ГИПОТЕЗА БРОКАРДА

Logman Shihaliev

logman1@list.ru The 1982 Decision +994505149553

ORCID: 0000-0003-1063-4712

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

Множество натуральных чисел $[1,(N+2)N]$ запишем в виде таблицы, по N последовательных чисел в каждой строке следующим образом (в данной статье о **«решето Эратосфена»** речь не идет). Докажем, что в каждой строке данной таблицы имеется как минимум одно простое число.

Таблица 1

1	2	$3,\dots$	$N-1$	N
$N+1$	$N+2$	$N+3,\dots$	$2N-1$	$2N$
$2N+1$	$2N+2$	$2N+3,\dots$	$3N-1$	$3N$
$3N+1$	$3N+2$	$3N+3,\dots$	$4N-1$	$4N$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$mN+1$	$mN+2$	$mN+3,\dots$	$(m+1)N-1$	$(m+1)N$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$(N-1)N+1$	$(N-1)N+2$	$(N-1)N+3,\dots$	N^2-1	N^2
N^2+1	N^2+2	$N^2+3,\dots$	$(N+1)N-1$	$(N+1)N$
$(N+1)N+1$	$(N+1)N+2$	$(N+1)N+3,\dots$	$(N+2)N-1$	$(N+2)N$
$(N+2)N+1=(N+1)^2$				

АННОТАЦИЯ

В данной статье доказывается, что каждая строка указанной таблицы содержит по крайней мере одно простое число. В произвольно взятой и первой строках таблицы параллельно (одновременно) вычеркиваем числа, кратные простым числам множества $L=\{2,3,5,\dots,P\}$. При этом количество вычеркнутых элементов в произвольной и первой строках таблицы остается сбалансированным (*в произвольно взятой строке вычеркивается не больше чисел, чем в первой строке*).

$L=\{2,3,5,\dots,P\}$ – все простые числа в первой строке таблицы 1.

В некоторых строках таблицы количество чисел (до вычёркивания чисел), кратных некоторым простым числам (называемым *критическими*) множества $L = \{2,3,5, \ldots, P\}$, может превышать соответствующее количество в первой строке на одну штуку. Эти «лишние» числа назовем *проблемными* числами.

В произвольно выбранной строке никогда не вычёркивается больше чисел, чем в первой. При необходимости (теоретически), чтобы сохранить баланс вычеркнутых чисел, некоторые проблемные числа могут быть оставлены невычеркнутыми. Однако, как показано в лемме 3, в результате полного процесса вычёркивания проблемные числа фактически исчезают. Кроме того, число 1 (единица) остаётся невычеркнутым в первой строке. Следовательно, в каждой строке таблицы остаётся как минимум одно невычеркнутое число – простое число.

Теорема

Для любых натуральных чисел $N \geq 2$ и k, где $1 \leq k \leq N + 2$, в интервале $[(k-1)N + 1, kN]$ найдётся по крайней мере одно простое число. Другими словами: каждая полная строка вышеуказанной таблицы содержит по крайней мере одно простое число.

Доказательство теоремы

Очевидно, что в первой строке таблицы всегда есть хотя бы одно простое число.

Согласно постулату Бертрана, для любого натурального числа $N \geq 2$ существует простое число в интервале $[N, 2N]$. Таким образом, и во второй строке таблицы (при $N \geq 2$) содержится как минимум одно простое число.

Теперь докажем, что, начиная с третьей строки и далее, каждая произвольно выбранная строка таблицы содержит как минимум одно простое число.

Обозначения

Обозначим через $t(m) = \left[\frac{N}{m}\right]$ и $T(m)$ количество чисел, кратных m, в первой строке таблицы до и после начала процесса вычеркивания соответственно.

Аналогично, через $f(m)$ и $F(m)$ обозначим количество чисел, кратных m, в произвольно выбранной строке таблицы до и после начала вычеркивания соответственно (здесь $m \leq N$).

Следовательно

$$f(m) = t(m) + \Delta_m \Rightarrow f(m) \geq t(m) \tag{1}$$

Лемма 1

Докажем, что, либо $\Delta_m = 0$, либо $\Delta_m = 1$.

Доказательство Леммы 1

Докажем, что $\Delta_m < 2$.

Обозначим длину (число элементов) первой строки таблицы так:

$$N = (m-1) + \left(1 + \left(\left[\frac{N}{m}\right] - 1\right) \cdot m\right) + \alpha = \left[\frac{N}{m}\right] \cdot m + \alpha \tag{2}$$

Здесь $0 \leq \alpha \leq m - 1$, **(3)**

где $(m-1)$ – количество чисел, не кратных m, в начале первой строки,

α – количество всех чисел (в конце первой строки) после наибольшего числа, кратного m ($\alpha = 0$ в случае $N \equiv 0(\mathrm{mod}\, m)$).

Предположим противное: существует строка, где $\Delta_m \geq 2$. Тогда её минимальная длина должна быть:

$$N = \left(\left(\left[\frac{N}{m}\right] + \Delta_m\right) - 1\right) \cdot m + 1 = \left(\left(\left[\frac{N}{m}\right] + 2\right) - 1\right) \cdot m + 1 = \left[\frac{N}{m}\right] \cdot m + m + 1 \tag{4}$$

С учетом (3) и (4) получаем следующее противоречие:

$$\left[\frac{N}{m}\right] \cdot m + \alpha = \left[\frac{N}{m}\right] \cdot m + m + 1 \Rightarrow \alpha = m + 1$$

Не может быть $\Delta_m < 0$, так как минимальное значение $f(m)$ и $t(m)$ равно $\left[\frac{N}{m}\right]$.

Лемма 1 доказана.

Обозначения

Число m обозначим *добрым числом*, если $\Delta_m = 0$.

Число m обозначим *критическим числом*, если $\Delta_m = 1$.

Если $f(m) = t(m) + 1 = \left[\frac{N}{m}\right] + 1$, то это обозначим так: m *увеличено в пользу числа* $\left[\frac{N}{m}\right] + 1$, или запишем так $m \to \left[\frac{N}{m}\right] + 1$.

Аналогично, если $F(m) = T(m) + 1$, то это обозначим так: m *увеличено в пользу числа* $T(m) + 1$, или запишем так $m \to T(m) + 1$.

Если в произвольно взятой строке $\Delta_m = 1$, то в данной строке имеется число F (см. (5), обозначим как ***проблемное*** *число*), кратное $m\left(\left[\frac{N}{m}\right] + 1\right) = m\left[\frac{N}{m}\right] + m > N$

$$\begin{cases} F = zm\left(\left[\frac{N}{m}\right] + 1\right) = zP_1P_2 = zP_1\left(\left[\frac{N}{P_1}\right] + 1\right) \geq z(N+1) \\ m = P_1, \quad \left[\frac{N}{P_1}\right] + 1 = P_2, \quad P_1 \to P_2 \Rightarrow P_1 \to \left[\frac{N}{P_1}\right] + 1 \Rightarrow P_1P_2 \geq N + 1 \end{cases} \tag{5}$$

P_1, P_2, z – натуральные числа.

Свойство 1.

Очевидно, что в строках (таблицы 1) под номерами $\{1, m+1, 2m+1, \ldots\}$ значение $\Delta_m = 0$ сохраняется.

Следствие свойства 1. Во всех указанных строчках таблицы число m является *добрым числом*.

Лемма 2

Пусть мы вычеркнули в произвольно взятой и в первой строках все числа, кратные *доброму* простому $p_1 \in L$, для которого выполнялось равенство:

$f(p_1) = t(p_1)$.

После такого вычеркивания изучим количество оставшихся (не вычеркнутых) чисел, кратных произвольно взятому простому числу $p_i \in L \setminus p_1$, для которого изначально было

$f(p_i) = \left[\frac{N}{p_i}\right] + \Delta_{p_i} = t(p_i) + \Delta_{p_i}$.

После вычеркивания чисел, кратных $p_1 \in L$, разность $F(p_i) - T(p_i)$ обозначим как δ_{p_i}:

$F(p_i) - T(p_i) = \delta_{p_i}$ (см. (8))

При этом очевидно, что в первой и произвольно взятой строках не останется чисел, кратных $p_1 p_i$.

Докажем, что

$\delta_{p_i} \leq \Delta_{p_i}$

Доказательство Леммы 2

Согласно (1) для простого числа $m = p_i$ и для составного $m = p_1 p_i$ запишем:

$f(p_i) = t(p_i) + \Delta_{p_i}$ **(6)**

$f(p_1 p_i) \geq t(p_1 p_i)$ **(7)**

$F(p_i) - T(p_i) = \delta_{p_i}$ **(8)**

Из (6) вычитываем (7)

$f(p_i) - f(p_1 p_i) \leq t(p_i) - t(p_1 p_i) + \Delta_{p_i}$ **(9)**

Очевидно, что

$f(p_i) - f(p_1 p_i) = F(p_i)$

$t(p_i) - t(p_1 p_i) = T(p_i)$

Последние два равенства подставим в (9) и получим

$F(p_i) \leq T(p_i) + \Delta_{p_i}$ **(10)**

Сравним (8) и (10), получим

$$\delta_{p_i} \leq \Delta_{p_i} \tag{11}$$

Лемма 2 *доказана*.

Следствие 1 Леммы 2. *Добрые* числа в процессе вычеркивания *критическими* не становятся.

Следствие 2 Леммы 2. Если в произвольно взятой строке, при $\Delta_m = 1$, число $\left[\frac{N}{m}\right] + 1$ (либо один из его множителей) является *добрым* числом, то при вычеркивании чисел, кратных числу $\left[\frac{N}{m}\right] + 1$ (либо его *доброму* делителю), число m становится *добрым*. Например, для $N = 13$ в третьей строке таблицы (*таблица 2*) $\Delta_3 = 1$. Другими словами, в первой строке такой таблицы четыре числа $(3, 6, 9, 12)$ кратны 3, а в третьей строке таких чисел пять $(27, 30, 33, 36, 39)$. То есть $3 \to \left[\frac{13}{3}\right] + 1 = 5$. Число 5 в данной строке *доброе* число, то есть $\Delta_5 = 0$. В третьей строке вычеркиваем два числа $(30, 35)$, кратные *доброму* числу 5. Параллельно и в первой строке вычеркиваем два числа $(5, 10)$, кратные *доброму* числу 5. В новом состоянии третьей строки *таблицы 2* количество чисел $(27, 33, 36, 39)$, кратных числу 3, стало столько же, сколько в первой строке $(3, 6, 9, 12)$ – четыре штуки. То есть, в начале было $f(3) = \left[\frac{13}{3}\right] + 1 = t(3) + 1 = 4 + 1 = 5$. А после вычеркивания чисел, кратных 5, для числа 3 получилось $\delta_3 = 0 \Rightarrow F(3) = T(3) + \delta_3 = T(3) + 0 = 4$.

Таблица 2

1	2	3	4	~~5~~	6	7	8	9	~~10~~	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	~~30~~	31	32	33	34	~~35~~	36	37	38	39

Следствие 3 Леммы 2. На любом этапе вычеркивания, если $\Delta_p = 0$ (или $\delta_p = 0$), то в произвольно взятой строке *таблицы 1* вычеркнем не больше чисел кратных доброму p (если таковые имеются), чем в первой строке таблицы кратных p. При этом в произвольно взятой строке не останется ни одного числа, кратного p.

Лемма 3

Если $\Delta_p = 1$, то в произвольно взятой строке имеется *критическое* простое p, и возможно имеется *проблемное* число F (см. (5)):

$$F = zm\left(\left[\frac{N}{m}\right] + 1\right) = zP_1P_2 = zP_1\left(\left[\frac{N}{P_1}\right] + 1\right) \geq z(N + 1).$$

Докажем, что после вычеркивания (*в произвольно взятой строке вычеркиваем не больше чисел, чем в первой строке*) чисел, кратных всем простым числам множества $L = \{2,3,5, \ldots, P\}$, в таблице не останется ни одного не вычеркнутого ***проблемного*** числа F.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3

Доказательства от противного. Предположим, что в конце вычеркивания в произвольно взятой строке некоторые *проблемные* числа F остались не вычеркнутыми. Другими слдвами, число F не имеет *доброго* множителя (делителя). Здесь $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ множество всевозможных *критических* делителей (множителей) числа F.

Составим таблицу всевозможных таких *проблемных* чисел (*таблица 3*):

Таблица 3

Вспомогательная лемма 3.1	Вспомогательная лемма 3.2	Вспомогательная лемма 3.3	Вспомогательная лемма 3.4
$F_1 = P_1P_2P_3P_4$	$F_2 = P_1^3$	$F_3 = P_1P_2^2$	$F_4 = P_1P_2P_3$

ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЛЕММА 3.1

Если проблемное число имеет вид $F_1 = P_1P_2P_3P_4$, то согласно (5) для $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ выполняются два варианта.

1-й вариант:

$$\begin{cases} P_1 \to P_2, & P_2 \to P_1 \\ P_3 \to P_4, & P_4 \to P_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1 \cdot P_2 \geq N+1 \\ P_3 \cdot P_4 \geq N+1 \end{cases}$$

Следовательно,

$$F_1 = P_1P_2P_3P_4 \geq (N+1)^2 \qquad \textbf{(12)}$$

(12) противоречит предположению, так как число $(N+1)^2$ находится вне таблицы.

2-й вариант:

$$P_1 \to P_2 \to P_3 \to P_4 \to P_\mu$$

Здесь $\mu = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$.

$$P_1 \cdot P_2 \geq N+1, \quad P_3 \cdot P_4 \geq N+1.$$

Следовательно,

$$F_1 = P_1P_2P_3P_4 \geq (N+1)^2 \qquad \textbf{(13)}$$

(13) противоречит предположению, так как число $(N+1)^2$ находится вне таблицы.

ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЛЕММА 3.1 доказана.

Вспомогательная лемма 3.2

Если не вычеркнутое проблемное число имеет вид $F_2 = P_1^3$, то возможен один вариант:

$P_1 \to P_1$,

Следовательно

$$P_1 \to P_1 \Rightarrow P_1 = \left[\frac{N}{P_1}\right] + 1 \Rightarrow P_1 \cdot \left(\left[\frac{N}{P_1}\right] + 1\right) = P_1^2 \Rightarrow N + 1 \le P_1^2 < 2N$$

Во второй строке таблицы число P_1^2 является наименьшим числом, кратным P_1. Запишем $P_1^2 - P_1 < N$, и продолжим следующим образом

$$P_1^2 - N = \gamma < P_1 \Rightarrow \gamma \le P_1 - 1 \Rightarrow P_1\gamma \le P_1^2 - P_1 < N \Rightarrow P_1\gamma < N,$$

и следовательно

$$P_1^2 - N = \gamma \Rightarrow P_1^3 - P_1 N = P_1\gamma \Rightarrow P_1^3 = P_1 N + P_1\gamma \qquad \textbf{(14)}$$

(14) означает (так как $P_1\gamma < N$), что число $F_2 = P_1^3 = P_1 N + P_1\gamma$ находится в $(P_1 + 1)$-й строке таблицы. Согласно следствию **Свойства 1**, число P_1 является добрым, и значит, число $F_2 = P_1^3$ не является проблемным.

Вспомогательная лемма 3.2 доказана.

Вспомогательная лемма 3.3. Если не вычеркнутое проблемное число имеет вид $F_3 = P_1 P_2^2$, то возможны четыре варианта:

Таблица 4

Вариант A	**Вариант B**	**Вариант C**	**Вариант D**
$P_1 \to P_2 \to P_1$	$P_1 \to P_2 \to P_1$	$P_1 \to P_2 \to P_2$	$P_1 \to P_2 \to P_2$
$P_1 > P_2$	$P_1 < P_2$	$P_1 > P_2$	$P_1 < P_2$

Вариант A. Если для $F_3 = P_1 P_2^2$ выполняется $P_1 \to P_2 \to P_1$ и $P_1 > P_2$, то число $P_1 P_2$ является наименьшим числом во второй строке таблицы, кратным одновременно и P_1, и P_2. Далее, для $\gamma < P_2 < P_1$ запишем $P_1 P_2 = N + \gamma$. Последнее умножим на P_2, и получим:

$$F_3 = P_1 P_2^2 = P_2 N + P_2\gamma$$

Так как $\gamma < P_2$, то $P_2\gamma < N$. В противном случае число $P_2\gamma < P_2^2$ должно находиться во второй строке. А это не возможно ($P_1 P_2$ наименьшее число во второй строке, кратное P_2). Получается, что, число $F_3 = P_1 P_2^2 = P_2 N + P_2\gamma$ находится в $(P_2 + 1)$-й строке, следовательно, согласно следствию **Свойства 1**, число P_2 не *критическое*, и число $F_3 = P_1 P_2^2$ не *проблемное*.

Вариант B. Аналогично для $P_1 \to P_2 \to P_1$ и $P_1 < P_2$ доказываем, что число P_2 не *критическое*, и число $F_3 = P_1 P_2^2$ не *проблемное*. Число $P_1 P_2$ является наименьшим числом во второй строке таблицы, кратным одновременно и P_1, и P_2. Далее, для $\gamma < P_1 < P_2$ запишем $P_1 P_2 = N + \gamma$. Последнее умножим на P_2, и получим

$F_3 = P_1 P_2^2 = P_2 N + P_2 \gamma$

Так как $\gamma < P_1$, то $P_2 \gamma < N$. В противном случае число $P_2 \gamma < P_2^2$ должно находиться во второй строке. А это не возможно ($P_1 P_2$ наименьшее число во второй строке, кратное P_2). Получается, что, число $F_3 = P_1 P_2^2 = P_2 N + P_2 \gamma$ находится в $(P_2 + 1) -$ й строке, следовательно, согласно следствию **Свойства 1**, число P_2 не *критическое*, и число $F_3 = P_1 P_2^2$ не *проблемное*.

Вариант C. Если $P_1 \to P_2 \to P_2$ и $P_2 < P_1$, то число P_2^2 является наименьшим числом во второй строке таблицы, кратным P_2. Запишем $P_2^2 = N + \gamma$. Умножим на P_1 и получим $P_1 P_2^2 = P_1 N + P_1 \gamma$. С учетом $\gamma < P_2 < P_1$ получаем $P_1 \gamma < N$. Число $F_3 = P_1 P_2^2 = P_1 N + P_1 \gamma$ находится в $(P_1 + 1) -$ й строке, следовательно, согласно следствию **Свойства 1**, число P_1 не *критическое*, и число $F_3 = P_1 P_2^2$ не *проблемное*.

Вариант D. Если $P_1 \to P_2 \to P_2$ и $P_1 < P_2$, то получается, что числа $P_1 P_2$ и P_2^2 одновременно являются наименьшими числами во второй строке, кратными P_2. А это не возможно по причине $P_1 \neq P_2$.

Вспомогательная лемма 3.3 доказана.

Вспомогательная лемма 3.4. Если не вычеркнутое проблемное число имеет вид $F_4 = P_1 P_2 P_3$, то имеется три варианта

Таблица 5

Вариант E	**Вариант F**	**Вариант G**
$P_1 \to P_2 \to P_3 \to P_1$	$P_1 \to P_2 \to P_3 \to P_2$	$P_1 \to P_2 \to P_3 \to P_3$

Вариант E. Если $P_1 \to P_2 \to P_3 \to P_1$, то теоретически получается:

* $P_1 \to P_2$. Число $P_1 P_2$ во второй строке наименьшее число, кратное P_1.

** Число $P_3 P_1$ во второй строке наименьшее число, кратное P_3. Получается $P_1 P_2 < P_3 P_1$.

*** Число $P_2 P_3$ во второй строке наименьшее число, кратное P_2. То есть, теоретически должно быть $P_2 P_3 < P_1 P_2$.

Получаем:

$$\begin{cases} P_2 P_3 < P_1 P_2 \Rightarrow P_3 < P_1 \\ P_2 P_3 > P_3 P_1 \Rightarrow P_2 > P_1, \\ P_1 P_2 < P_3 P_1 \Rightarrow P_2 < P_3 \end{cases}$$

По первым двум неравенствам получается $P_3 < P_1 < P_2 \Rightarrow P_3 < P_2$. А это противоречит третьему неравенству, где $P_2 < P_3$.

Вариант F. Если $P_1 \to P_2 \to P_3 \to P_2$, то теоретически получается:

* $P_1 \to P_2$. Число P_1P_2 во второй строке наименьшее число, кратное P_1.

Запишем $P_2P_3 = N + \gamma$.

** $P_2 \to P_3$. Число P_2P_3 во второй строке наименьшее число, кратное P_2. Заметим, что $(\gamma < P_2)$. То есть, должно быть $P_2P_3 < P_1P_2$.

*** Так же условие $P_3 \to P_2$ означает, что число P_2P_3 во второй строке наименьшее число, кратное P_3. Заметим, что $(\gamma < P_3)$.

$(P_2P_3 = N + \gamma)$ умножим на P_1, получим $P_1P_2P_3 = P_1N + P_1\gamma$. Так как $\gamma < P_2$, $\gamma < P_3$, то $P_1\gamma < P_1P_2$. Последнее означает, что число $P_1\gamma$ находится в первой строке (P_1P_2 во второй строке наименьшее число, кратное P_1). Получается, что число $F_4 = P_1P_2P_3 = P_1N + P_1\gamma$ находится в $(P_1 + 1) -$ й строке, следовательно, согласно следствию **Свойства 1**, число P_1 не *критическое*, и число $F_4 = P_1P_2P_3$ не *проблемное*.

Вариант G. Если $P_1 \to P_2 \to P_3 \to P_3$, то теоретически получается:

* Число P_1P_2 во второй строке наименьшее число, кратное P_1.

** Число P_2P_3 во второй строке наименьшее число, кратное P_2. Получаем $P_2P_3 < P_1P_2$

Запишем $P_2P_3 = N + \gamma \Rightarrow \gamma < P_2$. Умножим на P_1, получим $P_1P_2P_3 = P_1N + P_1\gamma$.

Так как $\gamma < P_2$, то число $P_1\gamma$ находится в первой строке (P_1P_2 во второй строке наименьшее число, кратное P_1). Значит, число $F_4 = P_1P_2P_3 = P_1N + P_1\gamma$ находится в $(P_1 + 1) -$ й строке, следовательно, согласно следствию **Свойства 1**, число P_1 не *критическое*, и число $F_4 = P_1P_2P_3$ не *проблемное*.

Вспомогательная лемма 3.4 доказана.

Лемма 3 доказана.

Замечание. В процессе доказательства *леммы 3* становится ясно, что среди простых делителей числа F *критических* делителей (множителей) не больше двух. Следовательно, в каждой строке *таблицы 1* имеется *доброе* число (*добрые* числа).

Теорема доказана.

Следствие 1. Решение 3-й проблемы Ландау (гипотеза Лежандра)

Для любого натурального N между N^2 и $(N+1)^2$ найдется хотя бы одно простое число.

Очевидно, что 3-я проблема Ландау (гипотеза Лежандра) является частным случаем теоремы о распределении простых чисел, и для любого натурального N между N^2 и $(N+1)^2$ найдется хотя бы два простых числа, так как в указанном интервале имеется две полных (*таблица 1*) строк (минимум по одному простому числу в каждой).

Следствие 2. Гипотеза Брокарда. Для любого натурального числа n между p_n^2 и p_{n+1}^2 (где $p_n > 2$ и p_{n+1} два последовательные простые числа) найдется хотя бы четыре простых числа.

Для любого простого числа $p_n > 2$ можно записать так:

$p_n = N - 1$ и $p_n + 2 = N + 1$

Между $p_n^2 = (N-1)^2$ и $(p_n + 2)^2 = (N+1)^2$ имеется четыре полных строк (*таблица 6*), в каждой из которых имеется минимум по одному простому числу. Мы учитываем, что минимальная разница между последовательными (начиная с тройки) простыми числами равно 2, и поэтому выбрали $p_n = N - 1$ и $p_n + 2 = N + 1$. Значит, чем больше разности между последовательными простыми числами, тем больше простых между их квадратами.

Таблица 6

	…	$(N-2)N$
$\boldsymbol{(N-1)^2}$	…	$(N-1)N$
$(N-1)N+1$	…	N^2
N^2+1	…	$(N+1)N$
$(N+1)N+1$	…	$(N+2)N$
$\boldsymbol{(N+1)^2}$	…	